

공학수학 에센스

연습문제 풀이 이용 안내

- 본 문제 풀이의 저작권은 마인속과 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전제하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

CHAPTER 11 푸리에 급수

[11.1 푸리에 급수]

1.

푸리에 급수
$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n] \sin nx$$

불연속점 $x=0, x=\pi, x=2\pi$ 에서 푸리에 급수의 수렴값 $\frac{1}{2}$

2.

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2\pi} (1 - (-1)^n) \cos nx + \frac{1}{n} (-1)^n \sin nx \right]$$

불연속점 $x = -\pi, \pi$ 에서 $\frac{\pi}{2}$ 로 수렴한다.

3.

$$\therefore f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2\pi^2} (1 - (-1)^n) \cos n\pi x - \frac{1}{n\pi} (-1)^n \sin n\pi x \right]$$

$\frac{1}{2}$ 불연속점 $x = -1, 1$ 에서 $\frac{1}{2}$ 로 수렴한다.

4.

$$f(x) = \frac{5}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n\pi} \left(-\sin \frac{2n\pi}{3} + \sin \frac{n\pi}{3} \right) \cos \frac{n\pi}{3} x - \frac{1}{n\pi} \left(\cos \frac{2n\pi}{3} - \cos \frac{n\pi}{3} \right) \sin \frac{n\pi}{3} x \right]$$

$\frac{1}{2}$ 불연속점 $x = 4, 5$ 에서 $\frac{1}{2}$ 로 수렴한다.

5.

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n^2} (-1)^n \cos nx + \left\{ (-1)^n \left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi}{n} \right) - \frac{2}{n^3} \right\} \sin nx \right]$$

$\frac{1}{2}$ 불연속점 $x = \pi$ 에서 $\frac{\pi^2}{2}$ 로 수렴한다.

6.

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \cos \frac{n\pi}{2} x$$

$\frac{1}{2}$ 불연속점 $x = -1, 1$ 에서 $\frac{1}{2}$ 로 수렴한다.

CHAPTER 11 푸리에 급수

7.

$$\therefore f(x) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n^2\pi} \left(1 - (-1)^n \right) \cos nx + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{n} \sin nx \right]$$

불연속점 $x = \pm\pi$ 에서 $-\frac{2\pi}{2} = -\pi$ 에 $\frac{1}{2}$ 점프.

8.

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(1 - (-1)^n \right) \sin \frac{n\pi}{2} x$$

$\frac{\pi}{2}$ 연속점 $x = -1$ 에서 $-\frac{1}{2}$ 로 수렴
 $x = 0$ 에서 0 으로 수렴
 $x = 1$ 에서 $\frac{1}{2}$ 로 수렴

9.

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{1-n}}{1-n} \right) - \frac{1}{\pi(1-n^2)} \right] \cos nx$$

불연속점 $x=0$ 에서 0 에 수렴.

10.

$$\therefore f(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1+2n} \sin \frac{(1+2n)\pi}{2} + \frac{1}{1-2n} \sin \frac{(1-2n)\pi}{2} \right) \cos 2nx \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1+2n} \cos \frac{(1+2n)\pi}{2} - \frac{1}{1-2n} \cos \frac{(1-2n)\pi}{2} + \frac{4n}{(1-2n)(1+2n)} \right) \sin 2nx \right]$$

불연속점 $x=0$ 에서 $\frac{1}{2}$ 에 수렴.

[11.2 푸리에 코사인 급수와 사인 급수]

11. 우함수

12. 기함수

13. 둘 다 아님

14. 기함수

15. 기함수

16. 기함수

CHAPTER 11 푸리에 급수

17. 기함수

18. 우함수

19.

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} \left[(-1)^n - 1 \right] \cos n \pi x$$

20.

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n \pi} \sin \frac{n \pi}{2} \cos \frac{n \pi}{2} x$$

21.

$$\therefore f(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin n x$$

22.

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 8n}{\pi (4n^2 - 1)} \cos 2n x$$

23.

우함수 확장은 $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{n^2} \cos nx, \quad 0 < x < \pi$

기함수 확장은 $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2 - n^2 \pi^2}{n^3} (-1)^n - \frac{2}{n^3} \right] \sin nx, \quad 0 < x < \pi$

24.

우함수 확장은 $f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[1 - (-1)^n]}{n^2 \pi} \cos nx, \quad 0 < x < \pi$

기함수 확장은 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin nx, \quad 0 < x < \pi$

CHAPTER 11 푸리에 급수

25.

우함수 확장은 $f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} \cos 2nx$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$
 기함수 확장은 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} \sin 2nx$

26.

우함수 확장은 $f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos 2nx$

기함수 확장은 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n(-1)^n}{\pi(4n^2-1)} \sin 2nx$

[11.3 복소 푸리에 급수]

27.

$\therefore f(x) = \pi + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left[\frac{2}{n^2} (1 - (-1)^n) + i \left(\frac{\pi}{n} - (-1)^n \frac{3\pi}{n} \right) \right] e^{inx}$

28.

$\therefore f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi} \right) \left[\frac{1}{n^2} (1 - (-1)^n) + i \frac{\pi}{n} (-1)^n \right] e^{inx}$

29.

$\therefore f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} (1 - (-1)^n) + i \frac{\pi}{n} (-1)^n \right] e^{inx}$

30.

$\therefore f(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx}$

31.

$f(x) = - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} i \frac{(1 - (-1)^n)}{n\pi} e^{in\pi x}$

CHAPTER 11 푸리에 급수

32.

$$f(x) = (1 - e^{-1}) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 \pi^2} (1 - e^{-1} - (-1)^n) e^{in\pi x}$$

33.

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(-\frac{1}{n\pi} \right) \sin \frac{n\pi}{2} e^{in\pi x}$$